Cours Physique 3: Electromagnétisme

I. El Aouadi

2019-2020

Plan

Introduction à l’électromagnétisme

- ❑ Notions mathématiques d’introduction à l’électromagnétisme
- ❑ Régime variable
- ❑ Equations de Maxwell-Faraday
- ✓ Induction magnétique et auto-induction
- ✓ Théorème d’Ampère en régime non permanent
- ✓ Potentiel scalaire et vectoriel « en jauge de Lorentz »
- ❑ Ondes électromagnétiques
- ✓ Equations locales et intégrales et relation de passages
- ✓ Energie d’une onde électromagnétique et Vecteur de Poynting
- ✓ Etude des ondes planes progressives monochromatique

Références

- **Electromagnétisme: Fondements et Applications**,

J. P. Perez, R. Carles, R. Fleckinger. DUNOD, PARIS 2002

- **Électromagnétisme *Phénomènes d'induction,*** Jean-Luc Dion**.** Loze-Dion editeur inc , 2002.
- **Comprendre et Appliquer l’électromagnétisme**, J.P. Longchamp (éditions MASSON 1990)
- **Électromagnétisme** Ondes et propagation guidée, Patrice Tchofo Dinda et Pierre Mathey. DUNOD 2017

- Dans l'univers il y a des **charges électriques** qui interagissent entre elles.
- Des charges ***en mouvement*** génèrent des **courants électriques**.
- Ces charges engendrent des **champs électrique et magnétique**.
- Toutes ces grandeurs, plus quelques **constantes fondamentales** (c, ε_o, μ_o), sont reliées entre elles par un ***ensemble cohérent d'équations***

- l'interaction magnétique = l'interaction entre les charges en mouvement
- L'interaction électrique + magnétique = **électromagnétique**

la théorie électromagnétique

- **structure & propriétés de la matière** ***(physique, chimie, vivant…)***
- **électrotechnique** : production & acheminement d'énergie,
  conversion énergie mécanique ↔ électromagnétique
- **télécommunication** : stockage et transmission de l'information

Introduction à l'électromagnétisme

QUELQUES DATES HISTORIQUES

- **1784** Charles A. **Coulomb** (France) ; loi des forces électriques.
- **1819** Découverte de l'action magnétique d'un courant par **Oersted** (Danemark) : un courant électrique peut générer un champ magnétique.
- **1820** **Biot et Savart** (France) : loi de création d'un champ magnétique par un courant.
- **1820** Pierre-Simon **Laplace** (France) : loi d'interaction entre courant électrique et champ magnétique.
- **1831** Michael **Faraday** (Angleterre) : principe de l'induction électromagnétique.
  Lenz (Allemagne) et **Henry** (USA) loi de lenz.
- **1865** James Maxwell élabore une théorie unifiée qui donne naissance a l'**électromagnétisme**.

Le concept fondamental de la théorie unifiée est la notion de champ électromagnétique, entité qui englobe le champ électrique et le champ magnétique. Dans certains cas particuliers cette entité se réduit a un seul des deux champs :

· le champ électrique, lorsque toutes les charges qui créent ce champ sont immobiles : c'est le domaine de l'électrostatique ;

· le champ magnétique, lorsque les courants qui créent ce champ sont constants dans le temps : c'est le domaine de la magnétostatique.

Introduction à l'électromagnétisme

L'interaction entre charges électriques fixes a permis de définir le champ électrostatique à partir de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur une charge témoin de valeur q : $\vec{F} = q\vec{E}$

L'expérience montre cependant que l'interaction entre charges en mouvement ne peut se réduire à une force électrostatique. Il convient donc de généraliser ce champ en analysant les forces qui s'exercent sur les charges en mouvement.

Introduction à l'électromagnétisme

Dans un référentiel galiléen, la force qui s'exerce sur une charge en mouvement peut être séparée en deux parties. L'une, indépendante de la vitesse, est une généralisation de la force électrostatique que l'on appelle ***la force électrique***. L'autre dépend de la vitesse de la particule et lui est orthogonale; on l'appelle ***la force magnétique***.

Chapitre 0: Notions mathématiques d'introduction à l'électromagnétisme

1- Notion de champ

Certaines grandeurs physiques couramment utilisées ne peuvent être définies de manière pertinente que par la donnée de la valeur de cette grandeur en différents points d'un milieu.

Un exemple de telles grandeurs est la **température**. On ne peut définir de manière pertinente la température (qu'il fait ou qu'il fera) sur une région qu'en précisant sa valeur en différents endroits de la région. De manière générale, lorsqu'on associe a tout point $M(x,y,z)$ d'un milieu, une valeur $U(M, t)$ d'une grandeur physique, on dit qu'on a défini un **champ** de cette grandeur physique.

Exemple:

Les valeurs de températures en différents endroits d'un territoire correspond a la définition d'un **champ de température** pour ce territoire.

Un champ peut être de nature **scalaire** ou **vectorielle** selon qu'il est défini par une grandeur physique scalaire (la température) ou vectorielle (le champ de gravitation terrestre).

- Un **champ** est dit **uniforme** dans une région donnée **D** si la grandeur définissant ce champ a la même valeur en chaque point de cette région :

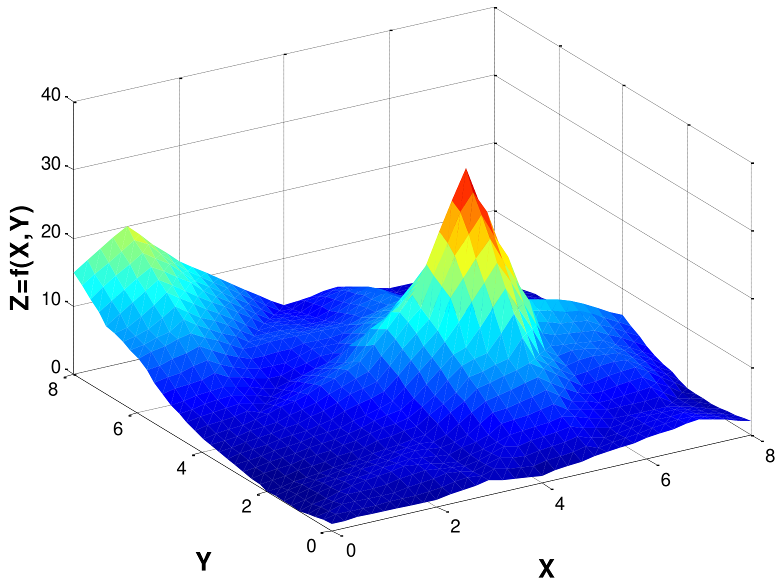
$$U(M,\ t) = U(t) \qquad \forall\, M \in \boldsymbol{D}$$

- Un **champ** est dit **stationnaire** (ou **permanent**) si la grandeur définissant ce champ ne dépend pas du temps :

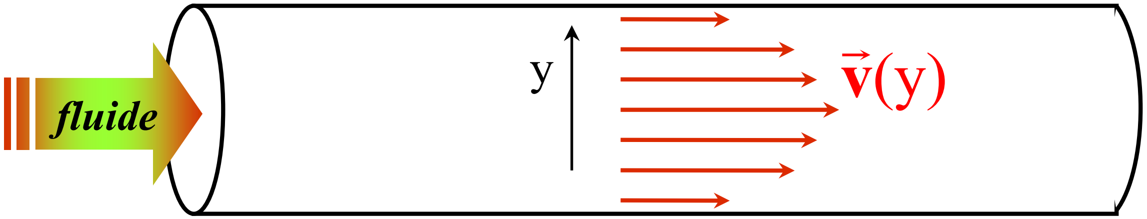
$$U(M,\ t) = U(M) \qquad \forall\, M \in \boldsymbol{D} \qquad \forall t$$

exemple:

champ scalaire (température, densité, potentiel électrostatique, etc.).



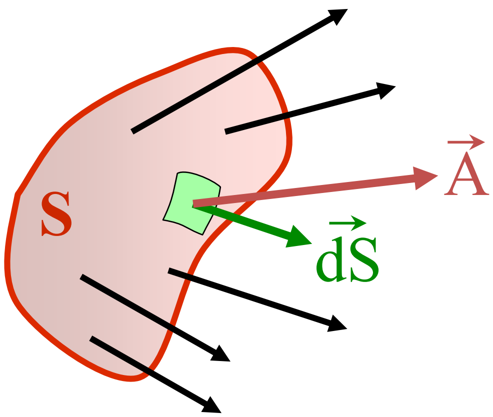
champ vectoriel (vitesse dans un écoulement, force de gravitation, champ électrique ou magnétique, etc.).



2- Flux et Divergence d'un champ vectoriel

Flux: Le flux Φ d'un champ de vecteur $\vec{A}$ à travers la surface S est donné par sur:

$$\Phi = \int d\Phi = \iint_S \vec{A}.d\vec{S} = \iint_{x,y} A(x,y)dxdy$$



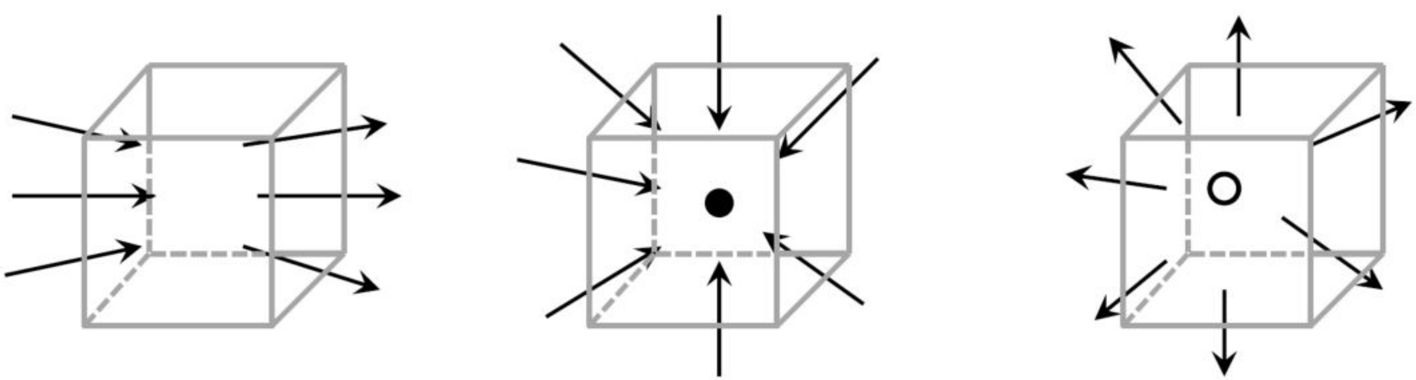
$\vec{dS}$, par convention, ***est un vecteur orienté vers l'extérieur pour une surface fermée***

Divergence: La divergence d'un vecteur $\vec{A}$ est définie par le produit scalaire de l'opérateur « nabla » avec ce vecteur. Le résultat est un scalaire.

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}$$

$$\nabla \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$



$\operatorname{div}\vec{F} = 0$ $\qquad$ $\operatorname{div}\vec{F} < 0$ $\qquad$ $\operatorname{div}\vec{F} > 0$

12

3- Théorème de la divergence (Green-Ostrogradsky):

Le flux d'un vecteur $\vec{A}$ à travers une surface fermée S est égal à la divergence de ce vecteur dans le volume V délimité par la surface S, $d\tau$ *est un élément de volume centré en un point de V*

$$\oiint_S \vec{A}.d\vec{S} = \iiint_V div(\vec{A})d\tau$$

4- Circulation et Rotationnel

Circulation: La circulation d'un vecteur $\vec{A}$ le long d'un chemin $\vec{L}$ est définie par:

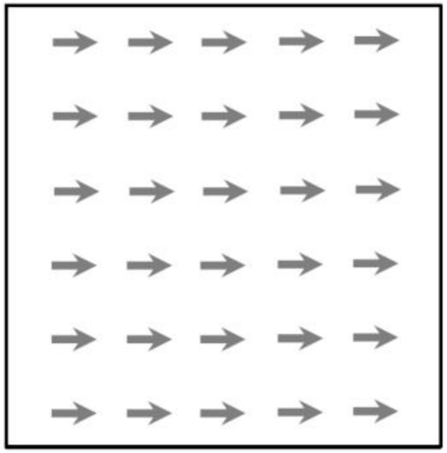
$$C(\vec{A}) = \int_L \vec{A}.d\vec{L}$$

Exemples :

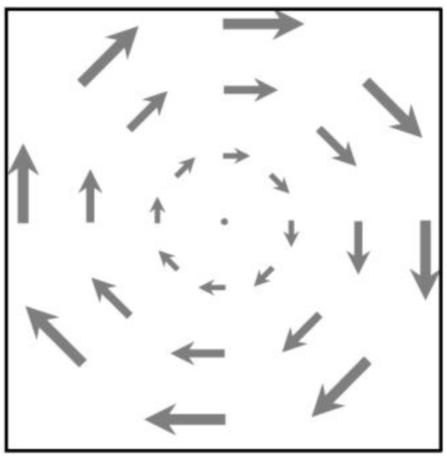
- le travail W est la circulation d'une force $\vec{F}$ le long d'un trajet
- la différence de potentiel U est la circulation du champ électrique $\vec{E}$ le long d'un trajet

Rotationnel: Le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ est le résultat de l'application de l'opérateur « nabla » sur ce vecteur, à la manière d'un **produit vectoriel** . Le résultat est un vecteur, que l'on peut calculer avec la règle de composition du produit vectoriel en **repère orthonormé**.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$



$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$ - champ « irrotationnel »



$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} \neq \vec{0}$

- champ « tourbillonnant », « tournoyant »
- le champ résultant est perpendiculaire au plan du tourbillon (comme l'axe d'une toupie), ici vers le haut

5-Théorème du Rotationnel (Théorème de Stokes)

La circulation d'un vecteur $\vec{A}$ le long d'un contour fermé L est égale au flux du rotationnel de ce vecteur à travers une surface S qui s'appuie sur ce contour .

$$\oint_L \vec{A}.d\vec{L} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{A}).d\vec{S}$$

Quelques Formules d'analyse vectorielle.

$\star\ \vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$
$\star\ \vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$
$\star\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{0}$
$\star\ \mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}) = 0$
$\star\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
$\star\ \mathrm{div}\,(f\,\vec{A}) = \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f + f\,\mathrm{div}\,\vec{A}$
$\star\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{A}) = f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} - \vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$
$\star\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f\,g) = g\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right) + f\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g\right)$

$\star\ \mathrm{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}$
$\star\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A} + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B}$
$\star\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} + \vec{B}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B}$
$\star\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\vec{A}\cdot\vec{A}) = 2\vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} + 2(\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A}$
$\star\ \Delta(f\,g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g$

Chapitre I: Les régimes variables et les équations de Maxwell

1 Le champ électromagnétique

1.1 Propriétés du champs électrostatique

Dans les états stationnaires, le champ électrique est appelé champ électrostatique. Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une distribution de charges de densité ρ située dans le vide, et à circulation conservative, c'est-à-dire qu'il satisfait les relations intégrale et locale :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E}.d\vec{l} = 0 \qquad ou \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = 0$$

Où (Γ) est un contour fermé quelconque orienté.

Il satisfait également les relations intégrale et locale:

$$\oiint_{S} \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau \qquad ou \qquad \mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Où (S) est une surface fermée et (τ) le volume intérieur à (S).

$\varepsilon_0 = 8.854187817.10^{-12} Fm^{-1}$ est la permittivité du vide

1.2 Champ électromoteur et vecteur densité de courant

- **Le champ électromoteur**

Lorsqu'un courant électrique circule dans un conducteur, cela implique l'existence d'une force $\vec{f}_{\mathrm{m}}$ agissant sur les porteurs de charge q et l'on définit le champ électromoteur $\vec{E}_{\mathrm{m}}$:

$$\vec{E}_m = \frac{\vec{f}_m}{q}$$

La circulation de ce champ le long d'un contour fermé orienté (Γ) n'est pas conservative, c'est-à-dire qu'elle est différente de zéro. Par définition cette circulation est appelée la force électromotrice ξ relative au contour considéré :

$$\xi = \oint_{(\Gamma)} \vec{E}_m . d\vec{l}$$

- ## **Le champ magnétique**

Le champ magnétique $\vec{B}$ créé par une distribution de courants de densité $\vec{j}$ est à flux conservatif, c'est-à-dire qu'il satisfait les relations intégrale et locale :

$$\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{ou} \qquad div\left(\vec{B}\right) = 0$$

où (S) est une surface fermée quelconque.

Le champ magnétique $\vec{B}$ satisfait les relations intégrale et locale :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) = \mu_0\, \vec{j}$$

où (Γ) est un contour fermé et orienté quelconque et (S) une surface quelconque s'appuyant sur (Γ) et orientée à partir de (Γ) par la règle dite du "tire-bouchon de Maxwell" ou "du bonhomme d'Ampère". $\mu_0 = 1.2566370614 \times 10^{-6} NA^{-2}$ est la perméabilité magnétique du vide.

2. Le régime variable

2.1 Le phénomène d’induction

Un circuit filiforme au **repos** et parcouru par un courant **invariable** n’entraîne l’apparition d’aucune f.é.m ou d’aucun courant dans un autre circuit filiforme au repos.

Il n’en est pas de même si le courant **varie** ou si les circuits en présence se **déplacent** l’un par rapport à l’autre : la f.é.m ou le courant qui apparaissent sont dû au phénomène d’induction.

Ce phénomène entraîne l’apparition d’un champ électrique supplémentaire (appelé champ induit) ; ce qui conduit à modifier la propriété fondamentale du champ électrique.

2.2 Loi de Faraday-Lenz

On peut induire une f.é.m dans un circuit filiforme (C) fermé en faisant varier le flux magnétique à travers le circuit : c'est le phénomène d'induction électromagnétique.

Pendant un temps dt, la variation du flux magnétique total à travers une surface quelconque s'appuyant sur le circuit (C) est $d\varphi$; la *f.é.m* induite e s'exprime à l'aide de la loi de Faraday:

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Cette loi, établie expérimentalement pour des variations relativement lentes du flux magnétique en fonction du temps, est valable pour tout régime variable et elle sert de base à l'étude de l'électromagnétisme classique. Puisque une f.é.m apparaît dans le circuit (C) et y fait circuler un courant ceci implique l'existence d'un champ électromoteur agissant sur les porteurs de charge du circuit (C). Ce champ est appelé champ électrique induit.

2.3 Equation de Maxwell-Faraday

Considérons un circuit (C) au repos soumis à un champ variable. Un champ électrique va prendre naissance dans tout l'espace où existe un champ magnétique variable. Le champ électrique induit joue un rôle de champ électromoteur et la f.é.m apparaissant dans tout le circuit (C) peut s'écrire :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \quad \oint_{(C)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial\left(\vec{B} \cdot d\vec{S}\right)}{\partial t} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Théorème de Stokes

$$\Rightarrow \quad \oint_{(C)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\ \left(\vec{E}_i\right) \cdot d\vec{S} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{rot}\ \left(\vec{E}_i\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2.4 Le théorème d'Ampère

Equation de continuité

Si on considère une surface fermée (S) entourant un volume (τ) . Si ρ est la charge volumique et q la charge totale du volume (τ) à l'instant t ; on a:

$$q = \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau$$

Pendant l'intervalle de temps dt, la variation de la charge totale est dq et on a :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau\right)$$

conservation de la charge:

$$\frac{dq}{dt} = -\int\int_{(S \ \ fermée)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{J}$: la densité de courant sortante de la surface S

$$\iiint_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = -\int\int_{(S\ fermée)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Théorème de **Green-Ostrogradsky:**

$$\int\int_{(S\ fermée)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint div\ \left(\vec{j}\right)\, d\tau$$

$$\iiint_{(\tau)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ \left(\vec{j}\right)\right]\, d\tau = 0$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit le volume (τ), il faut donc que l'on ait :

$$div\ \left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Cette équation dite de continuité traduit la conservation de la charge électrique et montre que le flux du vecteur densité de courant n'est plus conservatif comme dans le cas des états stationnaires.

$$div\ \left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{et} \qquad div\ \left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Longrightarrow \quad div\ \left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = div\ \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(div\ \left(\varepsilon_0 \vec{E}\right)\right) = div\left(\vec{j} + \frac{\partial\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right)}{\partial t}\right) = 0$$

On voit que la relation fondamentale de conservation du flux de la densité de courant sera conservée si on l'applique à une densité de courant total $\vec{J}_T$ égale à la somme de la densité de courant vrai $\vec{J}$ (appelé courant de conduction) et d'une densité de courant fictif appelé courant de déplacement et défini par :

$$\vec{j}_D = \frac{\partial\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right)}{\partial t}$$

▪ Le théorème d’Ampère

Le théorème d’Ampère peut être généralisé à condition de l’appliquer au courant total. La relation de Maxwell-Ampère qui en est la traduction s’écrit :

$$\overrightarrow{rot}\ \left(\vec{B}\right) = \mu_0\ \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

La relation intégrale du théorème d’Ampère généralisé est :

$$\oint_{(\Gamma)}\frac{\vec{B}}{\mu_0}\cdot d\vec{l} = \iint_{(S)}\vec{j}_T\cdot d\vec{S} = \iint_{(S)}\left(\vec{j} + \frac{\partial\left(\varepsilon_0\vec{E}\right)}{\partial t}\right)$$

En dehors des discontinuités, les équations de Maxwell s'écrivent :

– Théorème de Gauss pour $\vec{E}$

Forme locale	Forme intégrale
$div\ \left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\int\int_{(S\ fermée)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau$

– Théorème de Gauss pour $\overrightarrow{B}$

Forme locale	Forme intégrale
$div\ \left(\vec{B}\right) = 0$	$\int\int_{(S\ fermée)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

– Loi de Faraday

Forme locale	Forme intégrale
$\overrightarrow{rot}\ \left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

– Théorème d'Ampère-Maxwell

Forme locale	Forme intégrale
$\overrightarrow{rot}\ \left(\vec{B}\right) = \mu_0\ \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \left(\mu_0\ \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S}$

3. Induction électromagnétique

3.1 données expérimentales de base:

L'induction électromagnétique est un phénomène multiforme dans les différents aspects ont étés découverte est étudiées par le physicien « **Faraday** » au début de 19eme cycle.

- Production d'un courant électrique dans un circuit fermé ne comprenant pas de pile, à partir de champs magnétiques.

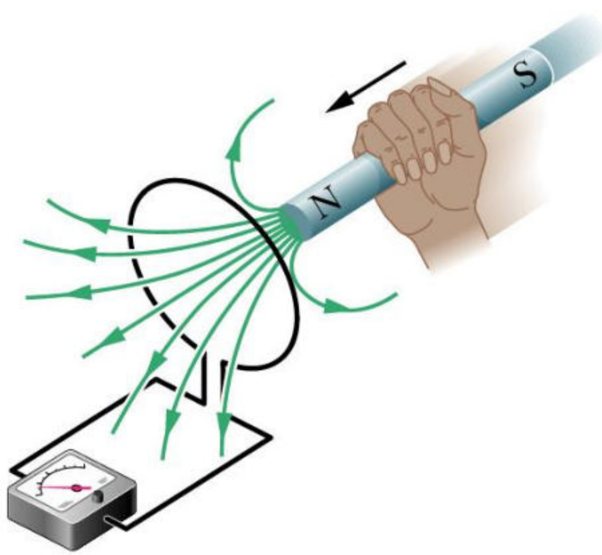
- Loi de Lenz **(Heinrich Lenz 1804-1865)**

- Loi de Faraday **(Michael Faraday 1791-1867)**

Expériences typiques qui font intervenir l’induction

➢ **Expérience 1:** La figure ci dessous illustre une boucle conductrice reliée à une multimètre. Puisqu’il n’y a pas de pile ou d’autre source de f.e.m., il n’y a pas de courant dans le circuit. Pourtant, si on approche un barreau aimanté de la boucle, un courant apparait dans le circuit.

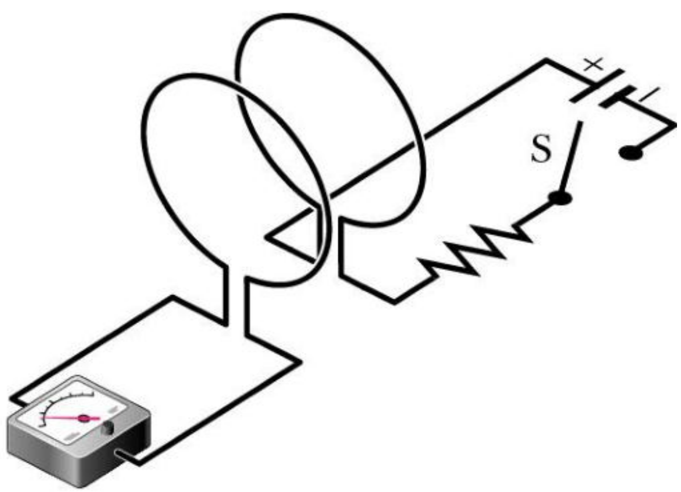
Le courant disparait lorsque le barreau aimanté s’immobilise. Si on éloigne ensuite le barreau aimanté de la boucle, un courant réapparait, mais dans le sens opposé.



➢ **Expérience 2**: Dans cette expérience, on utilise un dispositif comprenant deux boucles conductrices rapprochées l'une de l'autre sans se toucher.

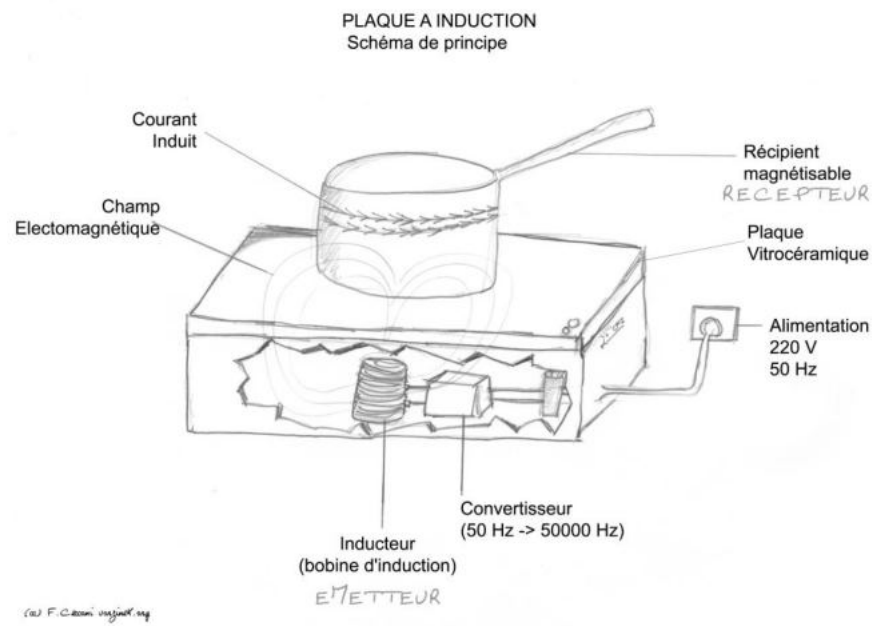
Si on ferme l'interrupteur S pour établir un courant dans la boucle de droite, l'ampèremètre enregistre un courant induit de façon soudaine et brève dans la boucle de gauche. Si on ouvre ensuite l'interrupteur, un autre courant apparait brièvement dans la boucle de gauche, mais cette fois dans le sens opposé.

On obtient un courant induit seulement lorsqu'il y a une variation de courant dans la boucle de droite (en fermant et en ouvrant l'interrupteur), et non lorsque le courant est constant –même dans le cas d'un courant intense.



Applications

- Transformateurs
- Générateurs / moteurs
- Plaque à induction



Les éléments de la plaque à induction

Pour induire des courants de Foucault dans le fond des casseroles, il faut produire un champ magnétique rapidement variable. C'est le rôle des bobines dites inductrices (figure 11), parcourues par un courant alternatif de haute fréquence : environ 25 kHz, soit 25 000 changements de sens par seconde.

La table de cuisson qui sépare les bobines et les casseroles est constituée d'une plaque en verre vitrocéramique. Notons que la plaque de vitrocéramique n'est pas chauffée directement puisque les courants induits chauffent directement le fond de la casserole. Ce système de chauffage direct réduit les pertes d'environ 20% par rapport aux plaques en fonte.

Comment cela fonctionne ?

- **l'induction électromagnétique:** Production d'un courant électrique dans un circuit fermé ne comprenant pas de pile, à partir d'un champ magnétique.

  - C'est la mise en mouvement d'électrons dans un circuit conducteur mis en présence d'un champ magnétique.
    - Création d'une f.e.m induite

- Le déplacement de charge qui entraine l'induction électromagnétique est dû à la force de Lorentz:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_B + \vec{F}_{E_{ind}}$$

La force électromotrice: le travail qui est fourni au circuit par unité de charge pour faire circuler ces charges dans le circuit

$$\xi = \frac{W(\vec{F}_L)}{q}$$

Comment cela fonctionne ?

- *Le déplacement de charge qui entraine l'induction électromagnétique est dû à la* force de ***Lorentz***

$$\overrightarrow{F_L} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} + q\,\overrightarrow{E_{ind}}$$

1. Il y a création d'un courant électrique induit dans un conducteur en mouvement dans **un champ magnétique:** *les charges se déplacent* avec le conducteur, avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique (**Induction de Lorentz).**

2. Il y a création d'un champ électrique induit dans un circuit quelconque, dû à un champ magnétique variable dans le temps. Ce champ électrique induit entraine, à son tour, un courant induit(**Induction de Neumann).**

Description du phénomène électromagnétique

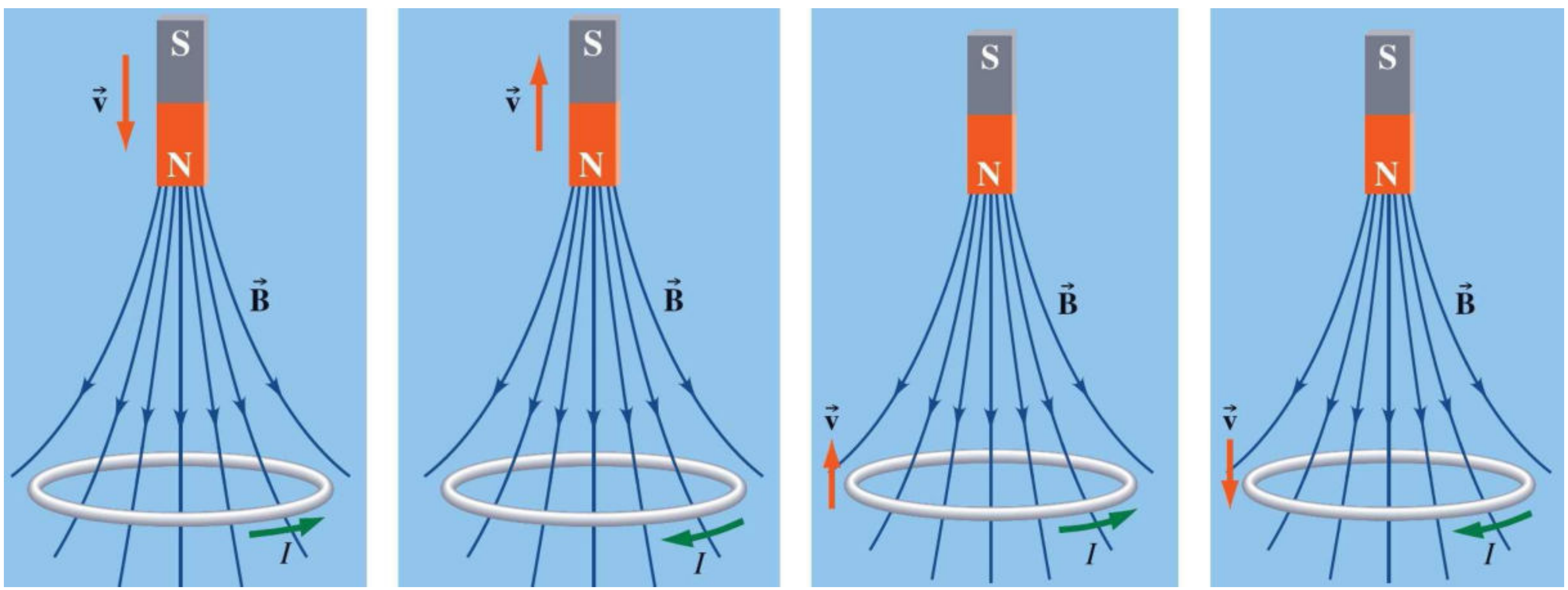
Expérimentalement, il a été constaté la création d'un courant électrique induit :

1. dans un circuit conducteur fixe placé dans un **champ magnétique variable** dans le temps.

2. dans un circuit conducteur dont les propriétés spatiales varient dans le temps, placé dans un **champ magnétique constant dans le temps** :
   a) **l'orientation du circuit varie dans le temps,**
   b) **l'aire du circuit varie dans le temps,**
   c) **la position du circuit varie dans le temps.**

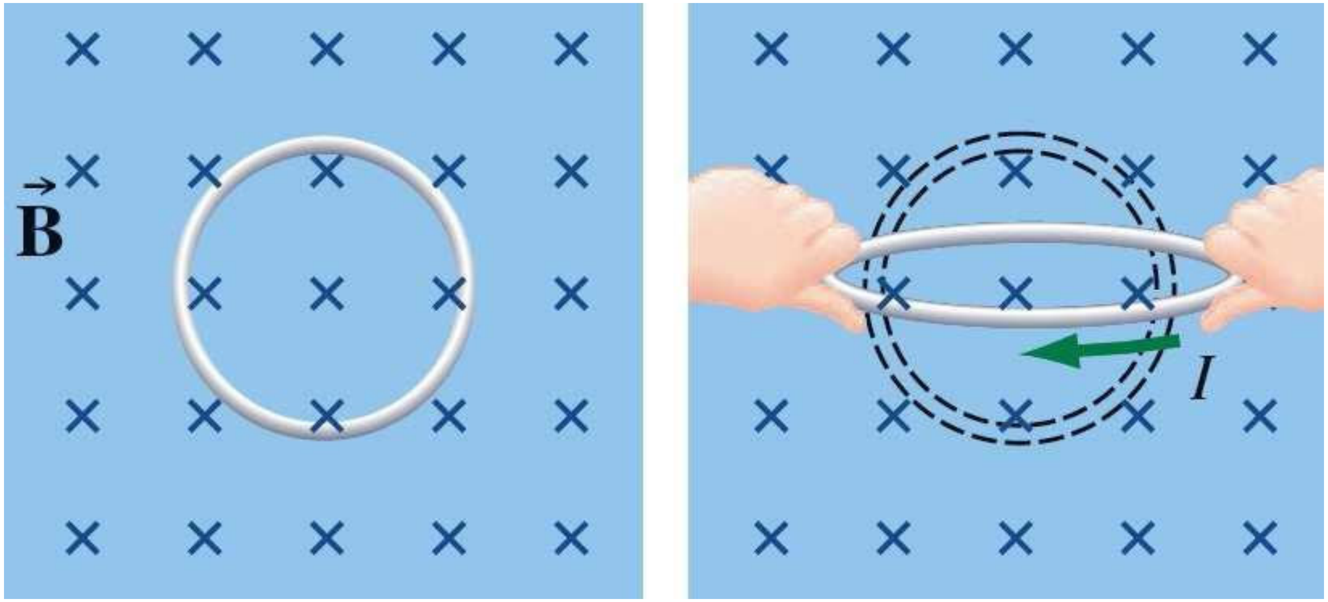
1. Variation du champ magnétique

- La variation **du champ magnétique** B dans la boucle conductrice produit un courant induit I *sur cette boucle.*



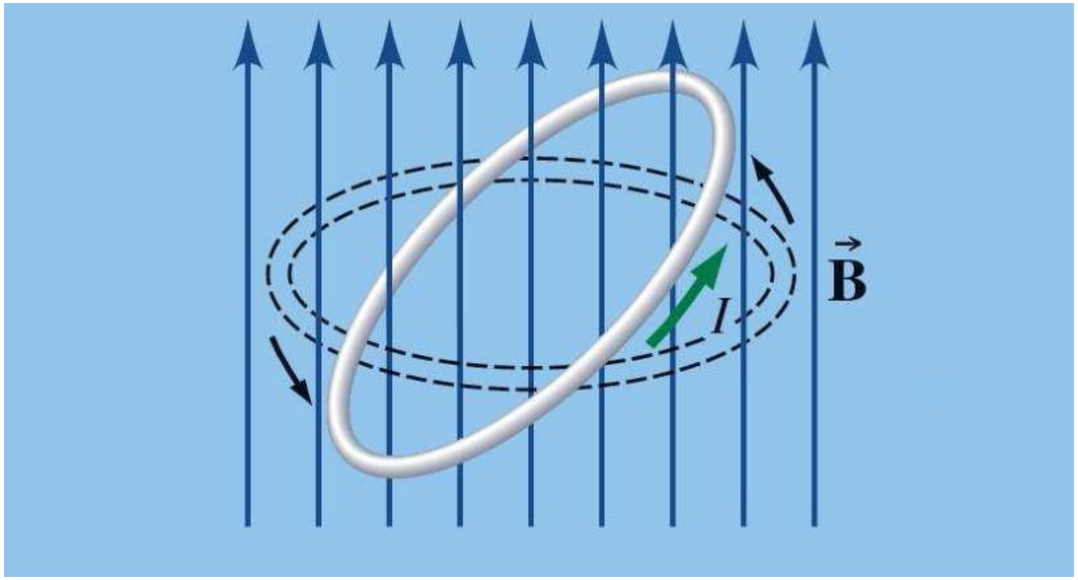
2a. Variation de l’aire

- La variation d’aire d’un anneau conducteur dont la surface est traversée par un champ magnétique produit un courant induit $\boldsymbol{I}$ sur l’anneau.



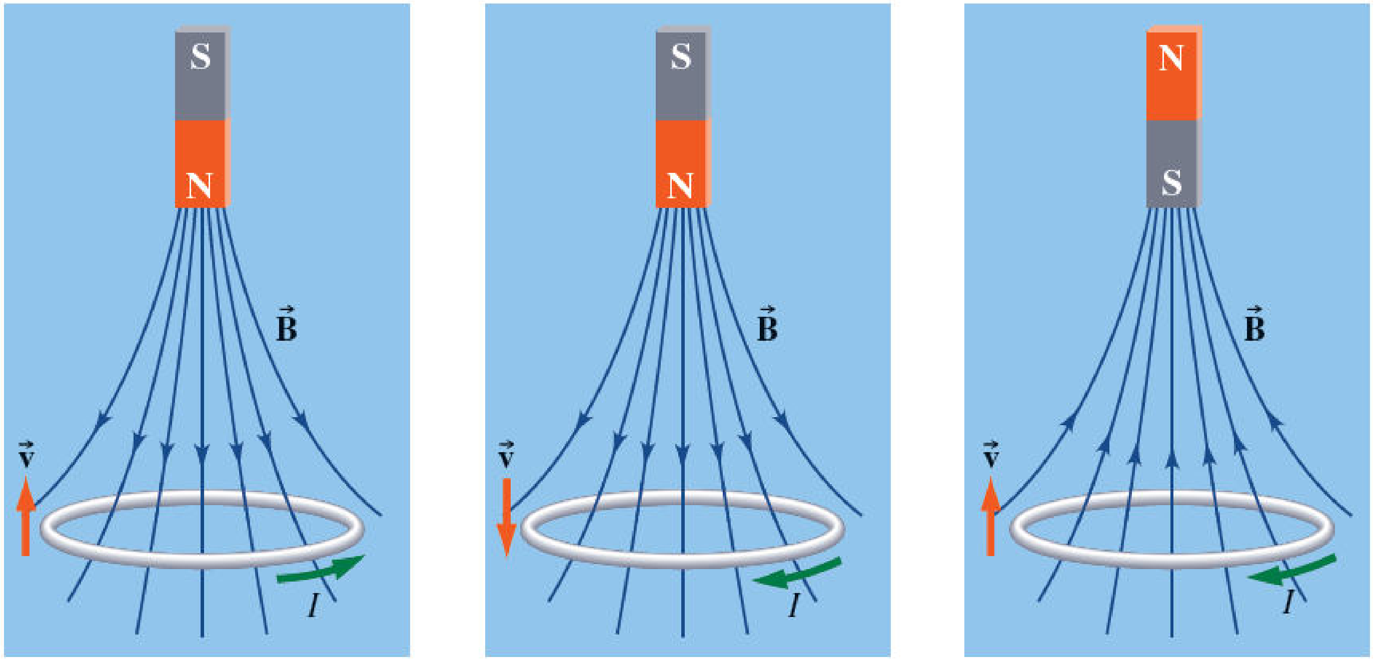
2b. Variation de l'angle

- Le changement d'orientation de la surface d'un anneau conducteur dans un champ magnétique produit un courant $\boldsymbol{I}$ sur l'anneau.



2c. Variation de position

- Lorsqu'une boucle se déplace dans un champ magnétique non uniforme, il y a création d'un courant induit I.



Le flux magnétique

- **Il y a création d'un courant induit si le nombre de lignes de champs qui traversent la surface délimitée par le conducteur varie dans le temps :**
  - Variation du champ magnétique $\vec{B}$
  - Variation de la surface S
  - Variation de l'angle θ
- $\Rightarrow$ *Définir le flux magnétique,* Φ_B, à travers une surface $\boldsymbol{S}$, *qui est proportionnel au nombre de lignes de champs qui traverse cette surface* S.

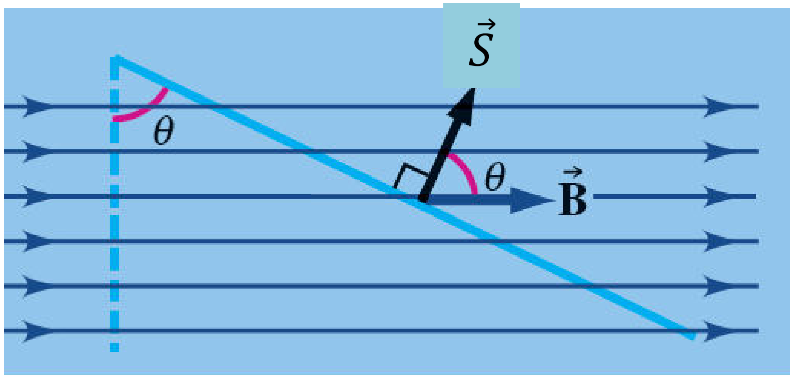
Le flux magnétique

- Le flux magnétique dans un champ uniforme est défini par :

$$\boldsymbol{\Phi_B = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = BS\cos\theta \ [Wb]}$$

- $\vec{S} = S \, . \vec{n}$
- Unité: le Weber ***(Wilhelm Weber 1804-1891)***

$$1\,Wb = 1\,T.m^2$$



Le flux magnétique

- Le flux magnétique dans un champ non uniforme est défini par :

$$\boldsymbol{\Phi_B = \int_S d\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}\ [Wb]}$$

- $d\vec{S}$ est un élément de surface

Sur une surface fermée, le flux est nul
(2e loi de Maxwell)

$$\boldsymbol{\int_{S_{fermé}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

Loi de Faraday

- La loi de Faraday:

« La force électromotrice induite dans un circuit fermé est proportionnelle *au taux de variation* du flux du champ magnétique traversant la surface délimitée par le circuit par *rapport au temps* »

$$\xi = -\frac{d\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{B}}}{dt}\ [V]$$

- La f.é.m. induite sur une boucle conductrice constituée de ***N spires*** est

$$\xi = -\boldsymbol{N}\frac{\boldsymbol{d\Phi_B}}{\boldsymbol{dt}}\ [\boldsymbol{V}]$$

Loi de Faraday

- Si le champ magnétique est uniforme :

$$\Phi_B = BS\cos\theta \quad \textbf{et} \quad \xi = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- Alors la variation de flux est :

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi_B}}{dt} = S\cos\theta\frac{dB}{dt} - SB\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + B\cos\theta\frac{dS}{dt}$$

Paramètre	f.é.m. induite
B variable	$\xi = -S\cos\theta\dfrac{dB}{dt}$
S variable	$\xi = -B\cos\theta\dfrac{dS}{dt}$
θ variable	$\xi = BS\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

Loi de Faraday

- Le courant induit est de la forme:

$$I_{induit} = \frac{\xi}{R_{boucle}}$$

R_{boucle} = R ésistance on de la boucle

- La puissance dissipée

$$P = R_{boucle}(I_{ind})^2$$

Remarque

Si B, S et θ sont constants alors ξ=0 et $I_{ind} = 0$

Loi de Lenz

Loi de Lenz selon Maxwell :

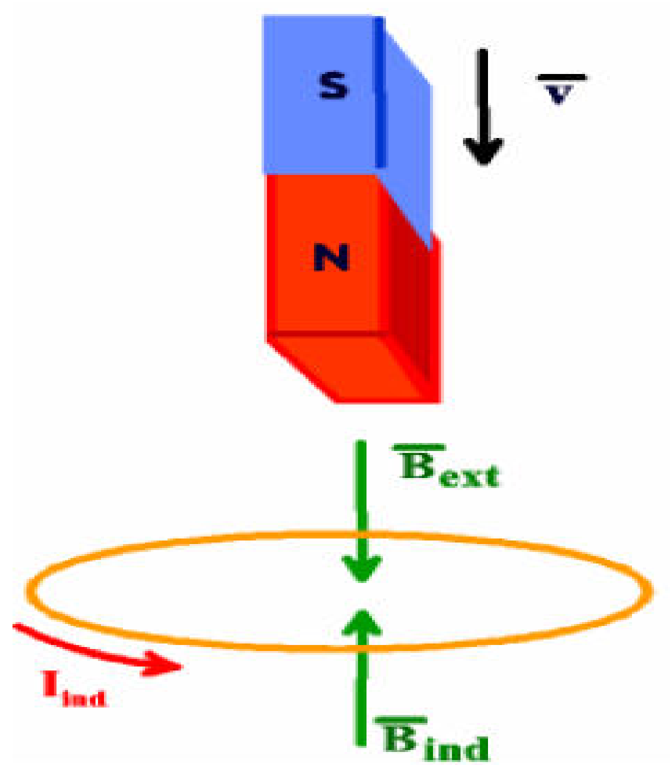
« L'effet de la f.é.m. induite est tel qu'il s'oppose à la variation de flux qui le produit »

<u>Plus pratique:</u>

« Le courant induit circule de manière à produire un champ magnétique induit dont l'effet est de contrer la variation de flux du champ extérieur qui produit ce courant ».

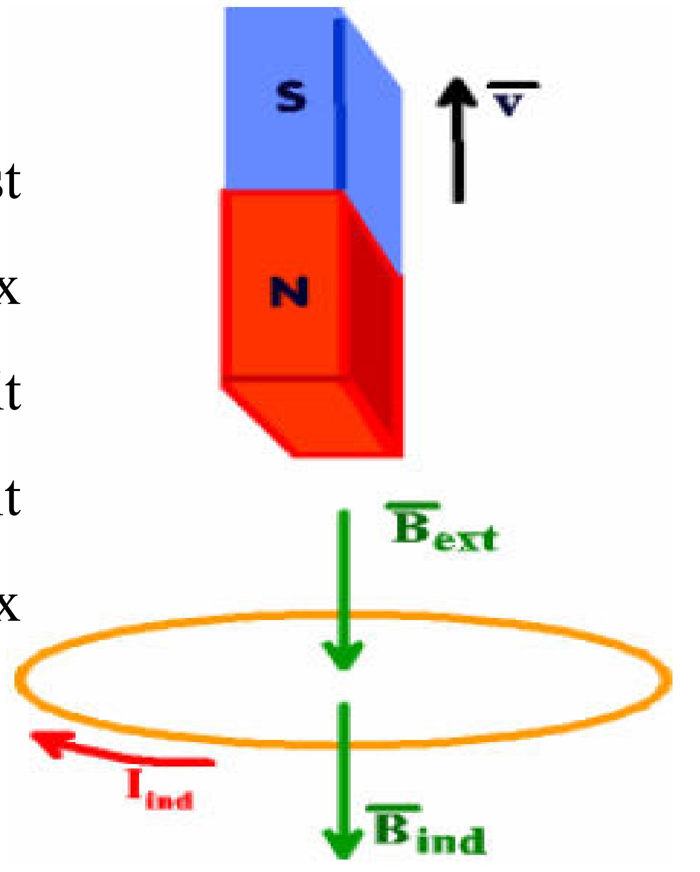
Pour comprendre comment appliquer la loi de Lenz appliquons-la à la situation illustrée sur la figure suivante:

l'aimant est rapproché de la boucle de conducteur, conduisant à une augmentation du champ magnétique extérieur, $\vec{B}_{\text{ext}}$, au travers de celle-ci et donc à une augmentation du flux magnétique.



Le courant induit I_{ind} doit donc avoir un sens tel que le champ qu'il induit, $\vec{B}_{\text{ind}}$ provoque une diminution du flux magnétique.

Dans le cas de la figure suivante , l'aimant est éloigné, provoquant une diminution du flux magnétique. Le sens du courant induit doit donc être tel qu'il provoque un champ induit qui conduit à une augmentation du flux magnétique.



Remarque :

Bien que la loi de Lenz n'ajoute rien sur le plan théorique à la loi de Faraday, elle est cependant très utile dans la pratique pour prévoir le sens des courants induits.

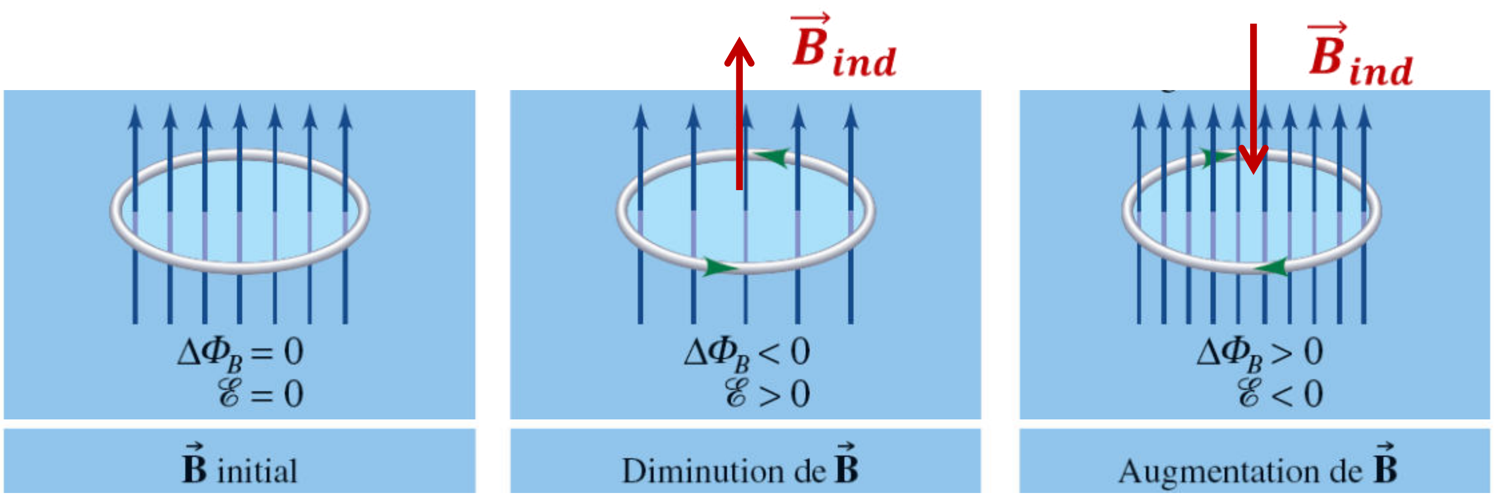
Forme mathématique de la loi de Lenz

Convention : signes de l'intensité i d'un courant et de la f.é.m. e qui le crée

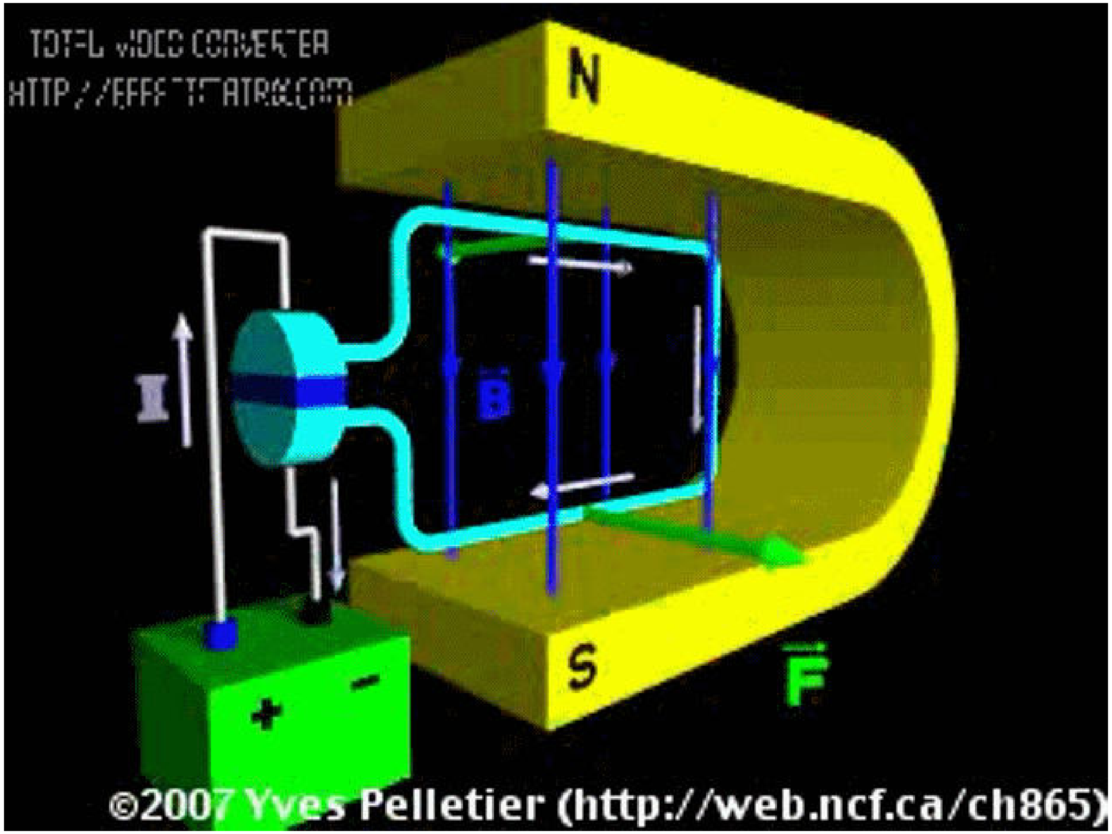
- Courant circulant dans le sens positif $\Leftrightarrow$ $i > 0$ $\Leftrightarrow$ $e > 0$
- Courant circulant dans le sens négatif $\Leftrightarrow$ $i < 0$ $\Leftrightarrow$ $e < 0$

En tenant compte de ces conventions et en notant la variation du flux inducteur $\Delta\Phi$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \Delta\Phi < 0, \text{ alors } i > 0 \text{ et } e > 0 \\ \text{Si } \Delta\Phi > 0, \text{ alors } i < 0 \text{ et } e < 0 \end{array}}$$



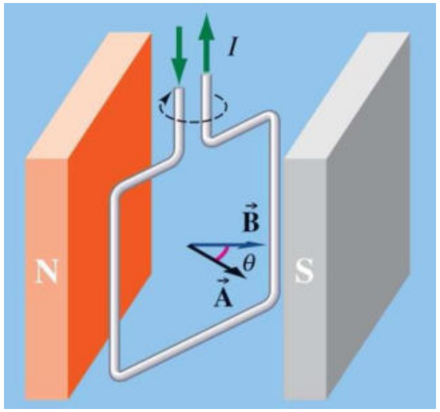
Les Générateurs



Les Générateurs

- Soit une boucle en rotation dans un champ magnétique uniforme, à la vitesse angulaire ω. Le flux magnétique à travers la boucle est :

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\,cos(\theta(t))$$



- Si $\theta = 0$ à $t = 0 \Rightarrow \theta(t) = \omega.\mathrm{t}$

$$\Rightarrow \Phi_B = BS\,cos(\omega \mathrm{t})$$

- La f.é.m. induite est :

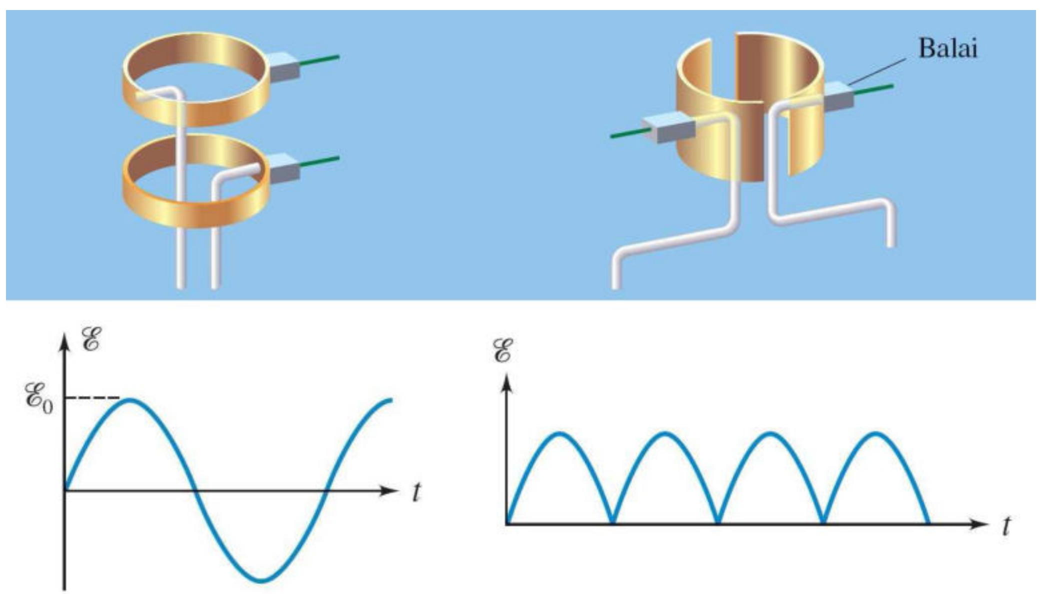
$$\xi = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS\,cos(\omega \mathrm{t}))$$
$$= BS\omega \sin(\omega \mathrm{t})$$

Les Générateurs

- La f.é.m. induite est N boucles:

$$\xi = NBS\omega \sin(\omega t) = \xi_0 \sin(\omega t)$$

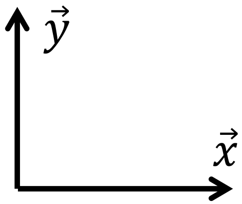
ξ_0 est l'amplitude maximum La f.é.m ($E_0 \, \alpha \, \omega, S, N$)



La f.é.m. dans un conducteur en mouvement

Cas 2c (induction de Neumann)

- *Champ magnétique constant dans le temps =>* $E_{ind} = 0$
- *La position du circuit varie dans le temps.*



- Le long de la portion en mvt, la force est

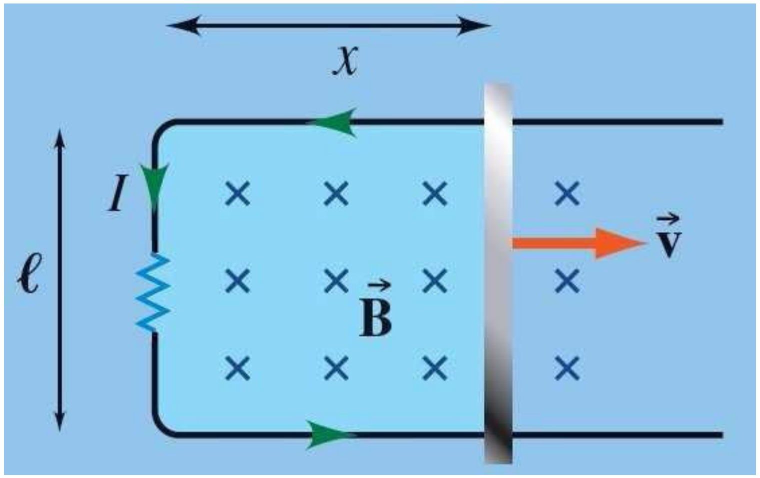
$$\overrightarrow{F_L} = q\,\vec{v} \times \vec{B} = -|q|vb\,(\vec{j})$$

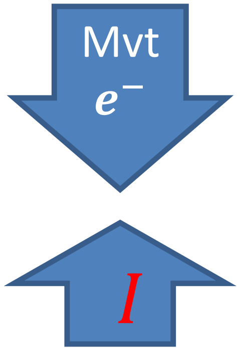
- Le travail de cette force est

$$W = \overrightarrow{F_L} \cdot \overrightarrow{dl} = qvb\,l$$

- La f.é.m. induite est :

$$\varepsilon = \frac{W(\vec{F}_L)}{q} = vbl$$



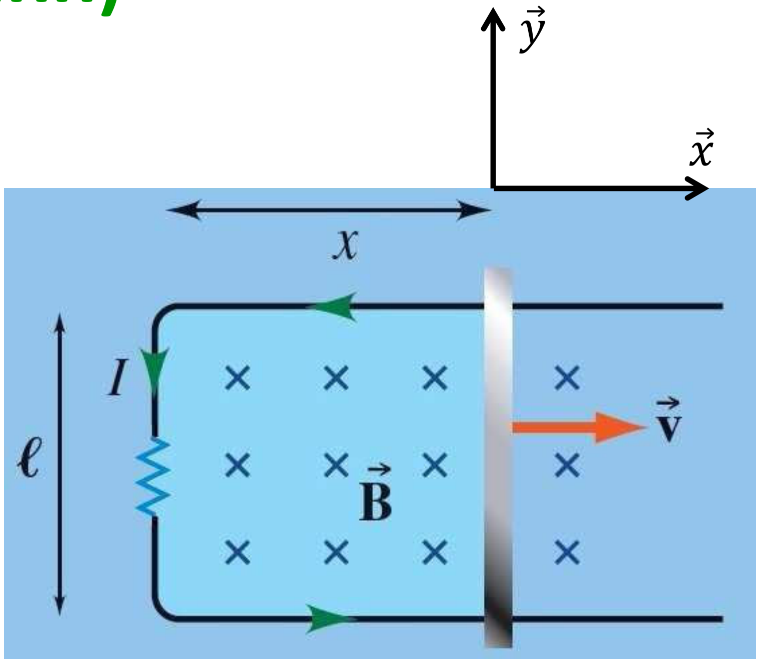


La f.é.m. dans un conducteur en mouvement

Cas 2 (induction de Neumann)

- Le flux au travers S est

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA = Blx(t)$$



- Loi de faraday

$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$$

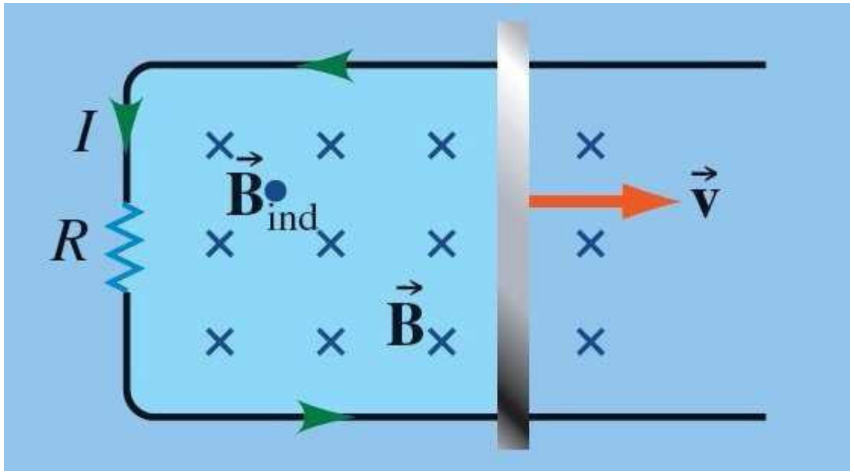
Dans cet exemple, le signe (-) dans l'expression signifie que le champ magnétique induit associé au courant induit est dans la direction inverse du champ magnétique extérieur. Cela permet de déterminer la direction du courant induit.

La f.é.m. dans un conducteur en mouvement

Cas 2 (induction de Neumann)

- Le courant induit est

$$I_{ind} = \frac{\xi}{R_{boucle}} = \frac{Blv}{R}$$



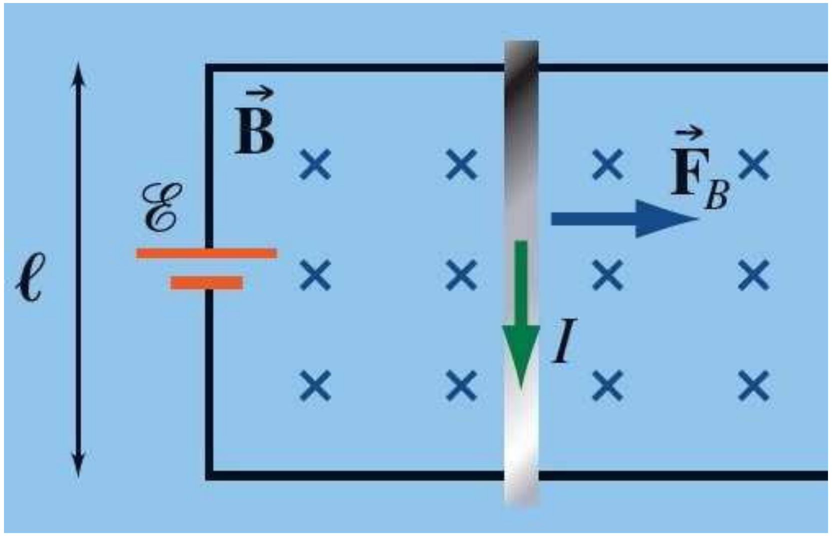
- La puissance induite est

$$P_{ind} = \frac{\xi^2}{R_{boucle}} = \frac{(Blv)^2}{R}$$

La f.é.m. dans un conducteur en mouvement

application

- À $t = 0$
  - $I_{ind} = 0$
  - $v = 0$
  - $\frac{d\Phi}{dt} = 0$
  - $I = \frac{\xi}{R}$



- la force magnétique qui agit sur la tige est alors :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F_B}} = \boldsymbol{I}\,\vec{\boldsymbol{l}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \boldsymbol{F_B} = \frac{\xi}{R}\, l\, B$$

La f.é.m. dans un conducteur en mouvement

<u>application</u>

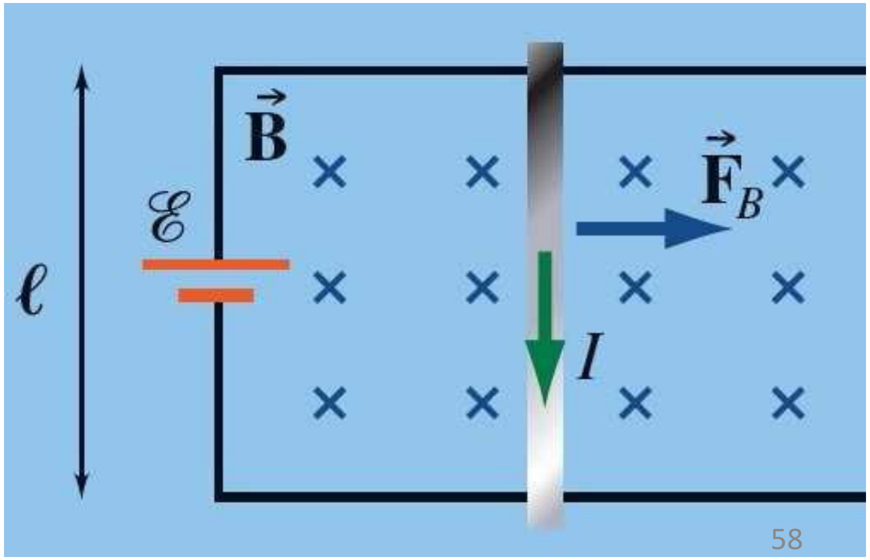
- Sous l'action de , la v augmennte, un courant induit apparait qui s'oppose au courant en circulation

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F_B}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{I_{ind}})\, \vec{\boldsymbol{l}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \boldsymbol{F_B} = \left(\frac{\xi}{R} - \frac{Blv}{R}\right) l\, B$$

- Vitesse limite atteinte lorsque $\sum F_x = 0 \Rightarrow \boldsymbol{F_B} = 0$

$$\boldsymbol{F_B} = \left(\frac{\xi}{R} - \frac{Blv}{R}\right) l\, B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v} = \frac{\xi}{\boldsymbol{Bl}}}$$



application

- ***Le moteur linéaire*** : Un moteur linéaire est essentiellement un moteur électrique qui « a été déroulé » de sorte qu'au lieu de produire un couple (rotation), il produise une force linéaire sur sa longueur en installant un champ électromagnétique de déplacement.

- *Exemple* :
  - Le skytrain : métros de: Vancouver, Bangkok …
  - Le canon **électrique**/RailGun

Courant de Foucault

- On appelle ***courants de Foucault*** les courants électriques créés dans une masse conductrice, soit par la variation au cours du temps d'un champ magnétique extérieur traversant ce milieu, soit par un déplacement de cette masse dans un champ magnétique constant.

- **Inconvénients :**
  - *pertes par courant de Foucault (perte par effet Joules)*

- **Applications**
  - *Système de freinage*
  - *Chauffage (plaque à induction)*
  - *Etc.*

II.3 Potentiel scalaire et vectoriel

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$div\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\ \vec{j} + \mu_0\ \varepsilon_0\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Maxwell-Faraday

Maxwell-Ampère

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0$$

Les potentiels (généralisation de l'électrostatique)

$$div\vec{B} = 0$$ Maxwell flux

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Maxwell Faraday

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ tel que $\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{B}$

Le potentiel scalaire *V* :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{grad}\, V = -\left(\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \\ \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

CONCLUSION : $\left(\vec{E}, \vec{B}\right) \Longleftrightarrow \left(\vec{A}, V\right)$

Les potentiels en électrostatique et magnétostatique

Les distributions de charges ρ et de courant j sont indépendantes du temps

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \cancel{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \Longrightarrow \boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Équation de Poisson

Énergie potentielle électrostatique : $E_p = qV$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int\int_V \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|} d^3\vec{r}_1}$$

De même pour le potentiel vecteur :

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}} \Longrightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|} d^3\vec{r}_1}$$

Les transformations de jauge

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}_0$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V_0 - \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \overrightarrow{grad}\ \varphi$$

$$V = V_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Transformation de Jauge
φ appelé jauge

Condition supplémentaire :

Jauge de Lorentz : $$div\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Jauge de Coulomb : $$div\vec{A} = 0$$

Propagation des potentiels dans le vide (1)

Maxwell-Gauss : $$div\left(-\overrightarrow{grad}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V+\frac{\partial}{\partial t}div\vec{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Ampère : $$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right)=\mu_0\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\overrightarrow{grad}V-\frac{\partial A}{\partial t}\right)$$

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}V+div\vec{A}\right)=-\mu_0\ \vec{j}$$

Propagation des potentiels dans le vide (2)

Jauge de Lorentz : $$div\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Equations de propagation des potentiels scalaire et vecteur (équation de d'Alembert Sans charges ni courants) :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\vec{j}$$

Chapitre III: Les équations de Maxwell dans le vide

<u>Grandeurs fondamentales électriques et magnétiques</u>

- Le champ électrique $\vec{E}$ et la force électromotrice $\vec{F}_e = q\vec{E}$
- l'induction électrique $\vec{D}$
- Le champ magnétique $\vec{H}$
- L'induction magnétique $\vec{B}$

Dans un milieu linéaire on a : $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ et $\vec{B} = \mu\vec{H}$

Avec ε la permittivité absolue du milieu

μ la perméabilité absolue du milieu

- On définit aussi d'autre grandeurs: la densité de courant $\vec{j} = \vec{j}_C + \vec{j}_D$ avec $\vec{j}_C$ le courant de conduction et $\vec{j}_D$ le courant de déplacement

Equations de Maxwell dans le vide

Les équations de Maxwell régissent les phénomènes faisant intervenir des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$.

Elles s'écrivent dans un espace vide de matière mais où il y a une densité de charge électrique ρ et une densité de courant $\boldsymbol{j}$ comme suit :

$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	ou	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	**Equation de Maxwell-Faraday**
$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	ou	$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	**Equation de Maxwell-Ampère**
$div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	ou	$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	**Equation de Maxwell-Gauss**
$div\,\vec{B} = 0$	ou	$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$	**Conservation du flux**

ε_0 Permittivité électrique du vide $\qquad$ μ_0 Perméabilité magnétique du vide

On trouve aussi souvent la notation suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$$

En définissant des nouveaux champs :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

Pour le vide :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

ε_0 et μ_0 sont des constantes.

Contenu physique des équations de Maxwell

Chacune de ces équations prises individuellement décrit un effet physique. La forme intégrale des équations de Maxwell permet de reconnaitre facilement cet effet.

- **Equation de Maxwell Gauss:**

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Sous forme intégrale on reconnait le théorème de Gauss:

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Cette équation, est la même qu'en électrostatique. Elle exprime la manière dont les charge électriques sont à l'origine du chapm électrique

➢ **Equation Maxwell flux magnétique:**

$$div\,\vec{B} = 0$$

La forme intégrale de cette équation:

$$\oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

Par analogie avec l'équation précédente on déduit qu'il n'existe pas de charge magnétique.

➢ Equation de Maxwell Ampère:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Sous forme intégrale il s'agit du théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.d\vec{S}$$

Lorsque le champs électrique est stationnaire, il n'y a que le1er terme et on reconnait le théorème d'ampère de la magnétostatique.

Dans le cas général, le second terme est appelé courant de déplacement.

Cette équation exprime la manière dont un courant électrique est à l'origine d'un champ magnétique. Et un champ électrique variable dans le temps crée lui aussi un champ magnétique.

➢ Equation de Maxwell Ampère:

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation décrit le phénomène d'induction: un champ magnétique variable est à l'origine d'un champ électrique. Ce champ est dénommé champ électromoteur:

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} \quad = -\frac{d\Phi}{dt} \ ;$$

$$\Phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{S}$$

Remarque : Les équations de Maxwell montrent qu'un champ électrique oscillant génère un champ magnétique oscillant et réciproquement

Si maintenant on se place loin des zones de charges ($\rho=0$) et des sources de courant ($\boldsymbol{j}=0$) :

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations sont couplées et sont comparables aux équations obtenues pour les ondes acoustiques. Essayons de la même façon de découpler ces équations, prenons par exemple le rotationnel de la première équation :

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = \vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right)$$

A l'aide de la deuxième équation de Maxwell on peut écrire :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\[2ex] \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\ \right)\end{array}\right\} \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Si maintenant on utilise les relations existantes entre les différents opérateurs vectoriels :

$$\Delta \vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{A} = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \overrightarrow{grad}\left(\overrightarrow{div}\ \vec{A}\right) - \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(\overrightarrow{div}\ \vec{E}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On sait que : $\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0$

$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ On obtient finalement une équation ne contenant que ***E.*** $\Rightarrow$

Equation de Propagation

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Avec $\quad C = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Le même raisonnement peut être appliqué au champ magnétique ***B*** :

$$\left.\begin{aligned}&\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\wedge\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)\\[2em]&\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\quad\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right)=\overrightarrow{grad}\left(\overrightarrow{div}\,\vec{B}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{B}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

On sait que : $\vec{\nabla}\bullet\vec{B}=0$

$$\Rightarrow\quad\Delta\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\quad\Rightarrow$$

Equation de Propagation

$$\Delta\vec{B}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$$

$$\text{Avec}\quad C=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Ondes planes sinusoïdales

En ce plaçant suffisamment loin de sa source, une onde peut être considérée comme plane. Du fait de la linéarité des équations de propagation on cherchera des solutions de la forme d'ondes planes harmoniques. Dans le cas d'une onde progressive on écrira :

$$E_x(x,y,z,t) = E_{0x}\cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \phi_x\right)$$
$$E_y(x,y,z,t) = E_{0y}\cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \phi_y\right)$$
$$E_z(x,y,z,t) = E_{0z}\cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \phi_z\right)$$

Les composantes du champ magnétique sont déterminées à l'aide des équations de Maxwell.

Avec

$$\omega = kC \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

La constante ***C*** est fondamentale en physique. Par définition du mètre, elle est égale à 299 792 458 m/s. On prend généralement 300 000 km/s. Elle représente la limite absolu de la vitesse de déplacement.

V.3.1 Relations entre les champs

Pour simplifier les calculs nous allons ici aussi utiliser la notation complexe.

Champ E:

$$\underline{\vec{E}}(x,y,z,t)=\underline{\vec{E}_0}e^{j(\omega t-\vec{k}.\vec{r})} \qquad \text{avec} \qquad \underline{\vec{E}_0}=E_{0x}e^{j\phi_x}\vec{u}_x+E_{0y}e^{j\phi_y}\vec{u}_y+E_{0z}e^{j\phi_z}\vec{u}_z$$

Champ véritable = partie réelle

Champ B:

$$\underline{\vec{B}}(x,y,z,t)=\underline{\vec{B}_0}e^{j(\omega t-\vec{k}.\vec{r})} \qquad \text{avec} \qquad \underline{\vec{B}_0}=B_{0x}e^{j\phi_x}\vec{u}_x+B_{0y}e^{j\phi_y}\vec{u}_y+B_{0z}e^{j\phi_z}\vec{u}_z$$

Pour les opérateurs de dérivation on a: $\frac{\partial}{\partial t}=j\omega$ et $\vec{\nabla}=-j\vec{k}$

En injectant dans les équations de Maxwell, on obtient :

$$j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}=j\omega\underline{\vec{B}}$$

$$j\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}}=-\frac{j\omega}{C^2}\underline{\vec{E}}$$

$$-j\vec{k}.\underline{\vec{E}}=0$$

$$-j\vec{k}.\underline{\vec{B}}=0$$

Partie réelle uniquement

$$\vec{B}=\frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$$

$$\vec{E}=-\frac{C^2\,\vec{k}\wedge\vec{B}}{\omega}$$

$$\vec{k}.\vec{E}=0$$

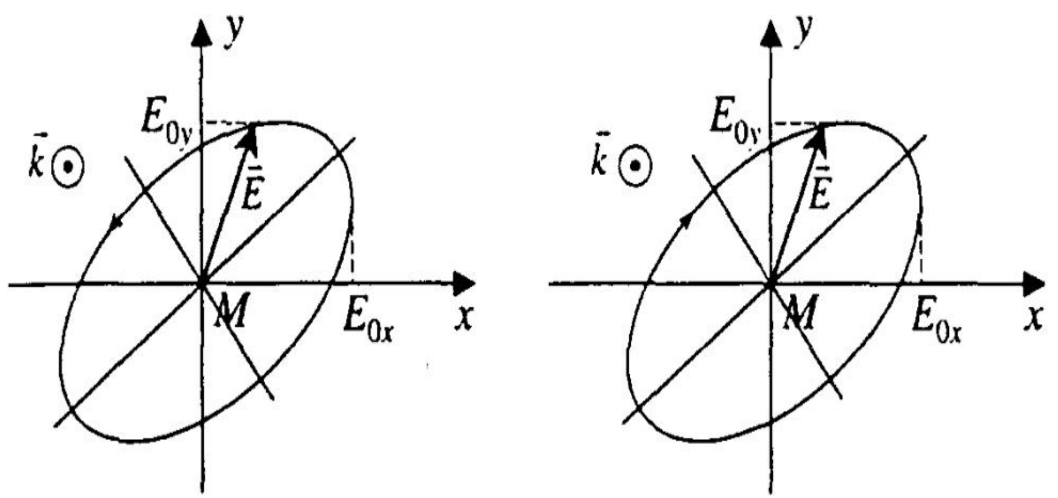
$$\vec{k}.\vec{B}=0$$

- Les deux champs sont en phase
- Les deux champs sont orthogonaux au vecteur d'onde ***k*** $\Rightarrow$ Onde transversale
- $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre directe
- Les modules des champs sont proportionnels $\Rightarrow \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = C$

V.3.2 Polarisation

La polarisation définit l'orientation du champ électrique dans le temps.

- Polarisation elliptique
- Polarisation rectiligne
- Sans polarisation : La lumière naturelle



Polarisation elliptique gauche

Polarisation elliptique droite

On sait que le champ électrique est transversale :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Phi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

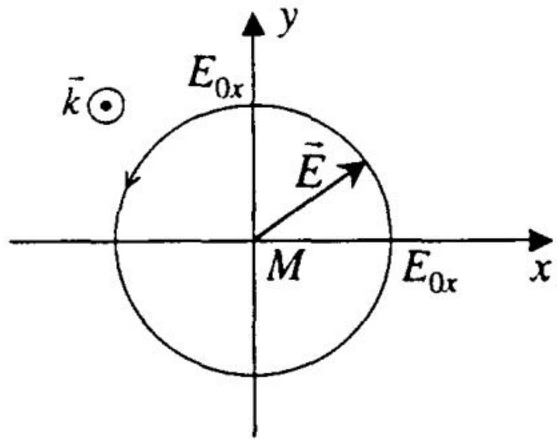
avec $\Phi = \phi_y - \phi_x$

Polarisation circulaire

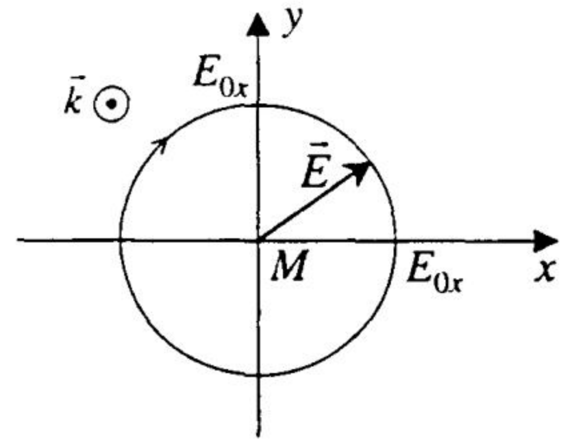
C'est un cas particulier de la polarisation elliptique, on a ici :

$$\Phi = \pm \frac{\pi}{2} \qquad + : \text{polarisation droite}$$

$$E_{0x} = E_{0y} \qquad - : \text{polarisation gauche}$$



Polarisation circulaire gauche



Polarisation circulaire droite

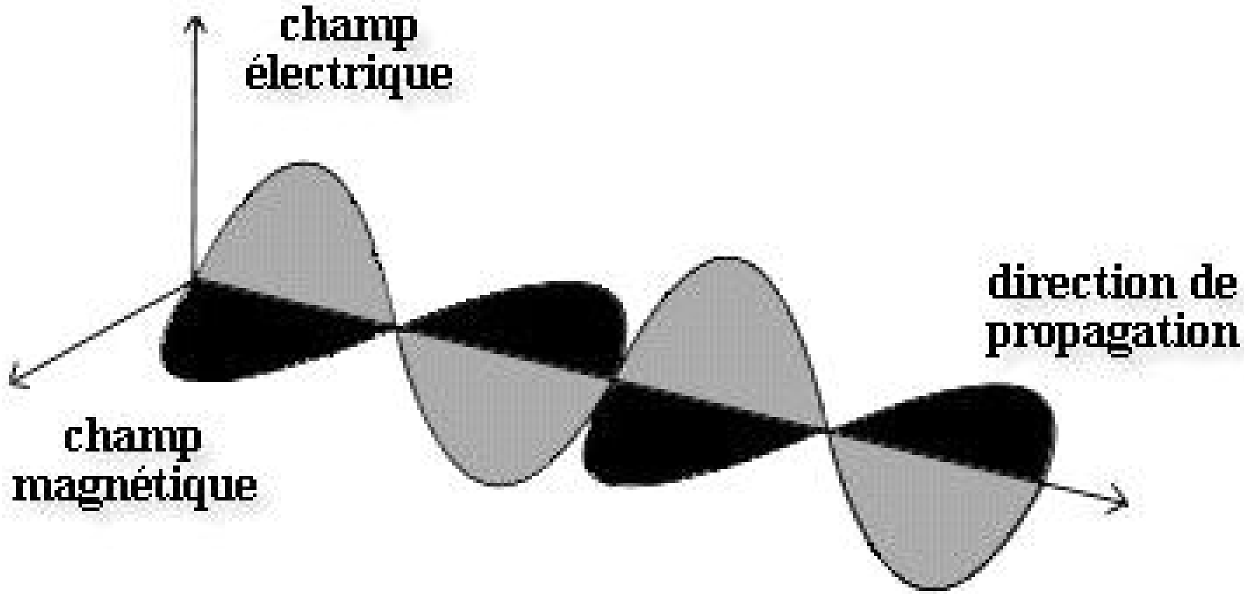
Polarisation rectiligne

C'est un cas particulier de la polarisation elliptique, on a ici :

$$\Phi = 0$$

ou

$$\Phi = \pi$$



L’énergie électromagnétique

Les ondes électromagnétiques transportent de l’énergie. La propagation de cette énergie se ressent dans de nombreuses situations de la vie quotidienne, comme par exemple, lors d’une exposition aux rayons solaires ou au rayonnement d’une source chaude, lorsqu’on fait chauffer un aliment dans un four a micro-ondes, ou lorsqu’on capte les émissions d’une station de radio ou de télévision.

On peut donc dire qu’en tout point ou règne un champ électromagnétique, il existe une certaine densité d'énergie électromagnétique.

L’énergie électromagnétique

Nous allons essayer de relier localement cette énergie qui se propage, au champ électromagnétique qui la transporte. Nous supposerons le milieu de propagation parfait, c’est à dire

homogène, isotrope et linéaire

Onde de forme spatiale et temporelle quelconques

Nous admettrons que les densités d'énergie électrique et magnétique calculées en régime stationnaire sont toujours valables en régime variable ; la densité d'énergie électromagnétique *w* en un point quelconque du milieu parcouru par une onde électromagnétique est donc à chaque instant :

w = densité d'énergie électrique + densité d'énergie magnétique

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)$$

Considérons dans le milieu, un volume τ limité par une surface (S). L’énergie électromagnétique qu’il contient est à chaque instant :

$$W = \iiint_{(\tau)} w d\tau$$

Pendant un temps *dt* l’accroissement d’énergie dans (τ) sera *dW* et la puissance instantanée *p’* acquise par ce volume sera

$$p' = \frac{dW}{dt} = \iiint_{(\tau)} \frac{\partial w}{\partial t} d\tau$$

Et on a: $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{rot}\left[\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}\right] = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E}.\left[\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)\right] - \frac{\vec{B}}{\mu_0}.\overrightarrow{rot}\vec{E}$$

D'après une relation de transformation, on a :

$$div\left[\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right] = \frac{\vec{B}}{\mu_0}.\overrightarrow{rot}(\vec{E}) - \vec{E}.\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -div(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0})}$$

La puissance électromagnétique instantanée perdue par le volume (τ) est :

$$p' = -\iiint_{(\tau)} div(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}).d\tau$$

Elle représente la puissance électromagnétique qui sort du volume (τ), c'est à dire la puissance moyenne ***p*** rayonnée par ce volume.

$$p = -p' = \iiint_{(\tau)} div(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}).d\tau$$

D'après la formule d'Ostrogradsky, on peut écrire :

$$p = \iint_{(S)} (\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}).d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{P}.d\vec{S}$$

Vecteur de Poynting

Le vecteur:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

est appelé le vecteur de Poynting. Sa direction donne en chaque point, la direction d'écoulement de l'énergie et son flux à travers une surface est égal à la puissance électromagnétique instantanée rayonnée par cette surface. Les courbes tangentes en chaque point au vecteur de Poynting peuvent être considérées comme des trajectoires de l'énergie ; on les appelle les ''rayons électromagnétiques''.

Vecteur de Poynting

La puissance $\mathcal{P}$ transportée par un champ électromagnétique à travers une surface $\boldsymbol{S}$ est le flux du vecteur de Poynting :

$$\boxed{\mathrm{P} = \int_S \vec{\Pi}.d\vec{S}}$$

Exemple d'une onde plane

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{C} = \frac{1}{C}\begin{vmatrix} -E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ 0 \end{vmatrix}$$

avec $\quad \vec{k} = k\vec{u}$

Déterminons maintenant l'expression du vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B} = \frac{1}{C\mu_0}\begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{C\mu_0}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[E_{0x}\cos(\omega t - kz + \phi_x)\right]^2 + \left[E_{0y}\cos(\omega t - kz + \phi_y)\right]^2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{1}{C\mu_0}\left\{E_{0x}^2\cos^2(\omega t - kz + \phi_x) + E_{0y}^2\cos^2(\omega t - kz + \phi_y)\right\}\vec{u}_z}$$

La moyenne temporelle est égale à :

$$\boxed{\overline{\vec{\Pi}} = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2C\mu_0}\vec{u}_z = \frac{\overline{E^2}}{C\mu_0}\vec{u}_z}$$ ou encore $$\boxed{\overline{\vec{\Pi}} = C\frac{\overline{B^2}}{\mu_0}\vec{u}_z}$$